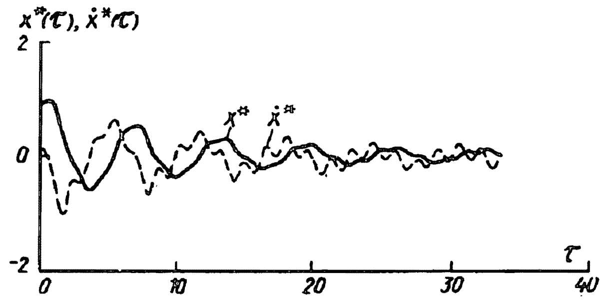

Фиг. 3

В данном примере необходимые элементы, полученные после решения программной задачи, имеют вид

$$t_1 = 1.663202, \quad t_2 = 2.144356, \quad t_3 = 7.946388, \quad t_4 = 8.427542,$$

$$y_1 = 0.973096, \quad y_2 = 0.336556, \quad k_0 = k_2 = k_4' = 0, \quad k_1 = k_3 = 1.$$

Количество определяющих уравнений в примере постоянно равно 6. Определяющие уравнения решались методом Ньютона с шагом $h = 0.02$. При этом на каждом шаге требовалось не более двух итераций метода Ньютона.

Начальный участок траектории системы, соответствующей управлению, построенному регулятором при отсутствии возмущений, изображен на фиг. 1. На фиг. 2, 3 представлены начальные участки траектории системы при действии $u^*(t)$, $t \geq 0$, возмущений $w^*(t) = 0.5 \sin(0.5t)$ и $w^*(t) = 0.5 \sin(4t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И.* Построение оптимальных управлений типа обратной связи в линейной задаче//Докл. АН СССР. 1991. Т. 320. № 6. с. 1294—1299.
2. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Конструктивные методы оптимизации. Минск: Университетское, 1984. Ч. 2.

Поступила в редакцию 29.05.92
Переработанный вариант 15.07.93

УДК 519.63

© 1994 г. Б. В. ПАВЛОВ, О. Е. РОДИОНОВА

(*Москва*)

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассматривается метод решения систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (о.д.у.) с постоянными коэффициентами, основанный на вычислении матричной экспоненты и интеграла от нее с помощью рекуррентных соотношений. Приводятся формулы для вычисления глобальной погрешности численного решения.

Как известно, решение задачи Коши

$$\dot{x} = Ax + b, \quad x(t_0) = x_0, \quad x = (x_1, \ldots, x_m), \quad b = (b_1, \ldots, b_m), \tag{1}$$

$A = (A_{ik})$, i, $k = 1, 2, \ldots, m$, записывается в виде

$$x(\tau) = H(\tau)\, x_0 + C(\tau)\, b, \quad t = t_0 + \tau. \tag{2}$$

Здесь $H(\tau)$ — матричная экспонента, удовлетворяющая матричному дифференциальному уравнению $\dot{H}(\tau) = AH(\tau)$; $H(0) = E$, E — единичная матрица,

$$C(\tau) = \int_0^\tau H(\tau - s)\, ds = \int_0^\tau H(s)\, ds$$

есть матрица, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $\dot{C}(\tau) = E + AC(\tau)$, $C(0) = 0$. Поскольку $\dot{C}(\tau) = H(\tau)$, то $H(\tau) = E + AC(\tau)$; отсюда следует формула

$$C(\tau) = A^{-1}\,[H(\tau) - E],$$

которая не теряет смысла и для вырожденных матриц A.

Для дискретных значений $t_n = t_{n-1} + h_n$, $n = 1, 2, \ldots$, получим

$$x_n = H(h_n)\, x_{n-1} + C(h_n)\, b, \quad x_n = x(t_n), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Если $H(h_n)$, $C(h_n)$, а следовательно, и $x_n = x(t_n)$ вычисляются точно, то величина шага интегрирования h_n ограничивается только требованием хорошей аппроксимации искомого решения $x(t)$ внутри интервалов интегрирования $t_n < t < t_{n+1}$. Предполагая, что эта задача решается в процессе интегрирования, сосредоточимся здесь на одном методе вычисления матриц $H(h)$ и $C(h)$.

Из группового свойства матричной экспоненты следует, что для любых θ_1, θ_2 справедливы соотношения $H(\theta_1 + \theta_2) = H(\theta_1)\, H(\theta_2)$, $C(\theta_1 + \theta_2) = C(\theta_1) + C(\theta_2) + C(\theta_1)\, AC(\theta_2)$, на базе которых и строятся рекуррентные алгоритмы вычисления $H(h)$ и $C(h)$.

§ 1. Рекуррентные формулы

Рассмотрим матричные уравнения

$$H_j = H_{j-1} H_{k_j}, \quad C_j = C_{j-1} + C_{k_j} + C_{j-1} A C_{k_j}, \tag{1.1}$$

где H_j, C_j, A — матрицы размера $m * m$, $j = 1, 2, \ldots$, k_j — целое неотрицательное число. Если $k_j \le j - 1$, то соотношения (1.1) становятся рекуррентными и позволяют последовательно вычислять H_j и C_j через заданные матрицы H_0 и C_0:

$$H_j = H_0^{l_j}, \quad C_j = A^{-1}\,[(E + AC_0)^{l_j} - E], \tag{1.2}$$

где l_j вычисляется по рекуррентной формуле:

$$l_j = l_{j-1} + l_{k_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, \quad l_0 = l, \quad l_{k_j} \le l_{j-1}.$$

Если положить $H_0 = E + AC_0$, то $C_j = A^{-1}\,[H_j - E]$, и в этом случае обе формулы (1.1) реализуют один и тот же процесс возведения в степень матрицы $H_0 = E + AC_0$, а последовательность k_j определяет скорость этого процесса. Самым быстрым, очевидно, будет тот, у которого $k_j = j - 1$, так что

$$(1.3)\qquad H_j = H_{j-1}^2 = H_{j-1}H_{j-1}, \quad C_j = 2C_{j-1} + C_{j-1}AC_{j-1},$$
$$l_j = 2l_{j-1} = 2^{j-1}, \quad l_0 = 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots .$$

Именно эти формулы используются при решении очень жестких систем о.д.у. [1]—[6].

§ 2. Вычисление $H(h)$ и $C(h)$

Если $C_0 = C(h_0)$ и $H_0 = H(h_0)$, то очевидно, что $H_j = H(l_jh_0)$, $C_j = C(l_jh_0)$ и, следовательно, погрешности $\delta H_j = H(l_jh_0) - H_j$ и $\delta C_j = C(l_jh_0) - C_j$ связаны только с погрешностями $\delta H_0 = H(h_0) - H_0$ и $\delta C_0 = C(h_0) - C_0$. В качестве C_0 можно взять любую, в частности дробно-рациональную аппроксимацию $C(h_0)$ (см. [5], [7]). Однако самым общим способом вычисления C_0, при котором строго контролируется точность численного решения x_n независимо от характера спектра A, является вычисление частных сумм разложения $H(h_0)$ и $C(h_0)$ в ряд Тейлора по степеням h_0 при $\|A\|h_0 = \varepsilon \ll 1$. Положим

$$H_0 = \sum_{k=0}^{m} \frac{(Ah_0)^k}{k!}, \quad C_0 = A^{-1}(H_0 - E) = h_0 \sum_{k=1}^{m} \frac{(Ah_0)^{k-1}}{k!}.$$

Тогда, путем очевидных преобразований можно получить

$$(2.1)\qquad H(l_jh_0) = (E + Q_{m+1})^{l_j} H_j$$
$$\text{и } C(l_jh_0) = C_j + A^{-1}[(E + Q_{m+1})^{l_j} - E]H_j,$$

где H_j, C_j вычисляются по формулам (1.1) или (1.3), а

$$Q_{m+1} = H_0^{-1}R_{m+1}, \quad R_{m+1} = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(Ah_0)^k}{k!},$$

так что $H(h_0) = H_0 + R_{m+1}$. Поскольку $\|A\|h_0 = \varepsilon \ll 1$, то $\|H_0^{-1}\| \sim 1$ и $\|Q_{m+1}\| \sim \varepsilon^{m+1}/(m+1)!$, и тогда, если $\delta = l_j \|Q_{m+1}\| \ll 1$, то с помощью (2.1) получим оценки

$$\|H(l_jh_0) - H_j\| \le l_j\varepsilon^{m+1}/(m+1)!\,\|H_j\|,$$
$$\|C(l_jh_0) - C_j\| \le l_j\varepsilon^{m}/(m+1)!\,\|H_j\|.$$

Матрицы H_j и C_j, таким образом, можно считать «базовыми» операторами. Обозначив $l_j = L$, $h = Lh_0$, $H_j = \tilde{H}(h)$, $C_j = \tilde{C}(h)$, перепишем (2.1) в более удобной форме:

$$(2.2)\qquad H(h) = (E + Q_{m+1})^L \tilde{H}(h),$$
$$C(h) = \tilde{C}(h) + A^{-1}[(E + Q_{m+1})^L - E]\tilde{H}(h).$$

С помощью (2.2) можно получить формулы для уточнения базовых операторов $\tilde{H}(h)$ и $\tilde{C}(h)$.

Обозначим

$$(E + Q_{m+1})^L = E + M(L, m, p) + T(L, m, p),$$

$$M(L, m, p) = LQ_{m+1} + \ldots + L!/[p!(L-p)!]\,Q^p_{m+1}.$$

Для $T(L, m, p)$ справедлива оценка $\|T(L, m, p)\| \le I_p(\delta)$, $I_p(\delta) = \exp(\delta) - (1 + \delta + \ldots + \delta^p/p!)$. Для $A^{-1}T(L, m, p)$ получим: $\|A^{-1}T(L, m, p)\| < \|A\|^{-1} \times I_p(\delta) = h(L\varepsilon)^{-1} I_p(\delta)$. При $\delta \ll 1$ имеем $I_p(\delta) \sim \delta^{p+1}/(p+1)!$ и для $\widetilde{H}(h)$ и $\widetilde{C}(h)$ можно написать уточняющие формулы

(2.3а) $$H_p(h) = \widetilde{H}(h)\,[E + M(L, m, p)]$$

и $$\delta H = H(h) - H_p(h) = T(L, m, p)\,\widetilde{H}(h),$$

$$\|\delta H\| \le [\delta^{p+1}/(p+1)!]\,\|\widetilde{H}(h)\|,$$

(2.3б) $$C_p(h) = \widetilde{C}(h) + A^{-1}M(L, m, p)\,\widetilde{H}(h)$$

и $$\delta C = C(h) - C_p(h) \sim A^{-1}T(L, m, p)\,\widetilde{H}(h),$$

$$\|\delta C\| < h(L\varepsilon)^{-1}\,\delta^{p+1}/(p+1)!.$$

Для вычисления погрешности $H(h)$ и $C(h)$ в сумме $T(L, m, p)$ можно ограничиться первым членом, тогда

$$\delta H \sim \frac{(L+1)!}{(p+1)!(L-p-1)!}\,Q^{p+1}_{m+1}\widetilde{H}(h),$$

$$\delta C \sim \frac{(L+1)!}{(p+1)!(L-p-1)!}\,A^{-1}Q^{p+1}_{m+1}\widetilde{H}(h).$$

Для иллюстрации, положив $p = 1$, $m = 4$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $\delta \le 10^{-2}$, из условия $L\varepsilon^{m+1}/(m+1)! < 10^{-2}$ определим значения L, при которых применимы уточненные формулы (2.3а), (2.3б): $L < 1.2 \cdot 10^{15}$. Таким образом, поскольку $h = Lh_0$, с помощью формул (2.3а, б) осуществляется достаточно точное и хорошо контролируемое вычисление $H(h)$ и $C(h)$ на интервале h, на 15 порядков превышающем h_0, что, по-видимому, достаточно для многих практических задач.

В том случае, когда требуется решать исходную систему (1) на интервале заметно большем чем $10^{15}\,h_0$, нужно скорректировать $\widetilde{H}(h)$ и $\widetilde{C}(h)$ по формулам более высокого порядка точности и использовать полученные матрицы в качестве H_0 и C_0 в рекуррентных формулах (1.1), (1.3), что увеличит интервал интегрирования еще на несколько порядков.

Замечания. 1. При операциях с формулами нужно иметь в виду коммутативность всех фигурирующих в них матриц.

2. Вычисление $Q_{m+1} = H_0^{-1}R_{m+1}$ не представляет трудностей, поскольку $H_0 \sim E$, а ряд

$$R_{m+1} = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(Ah_0)^k}{k!}$$

быстро сходится при $\|A\|h_0 = \varepsilon \ll 1$.

3. Выбор m и ε не является произвольным из-за ограниченности разрядной сетки. Чтобы не произошло неконтролируемой потери знаков, нужно следить за выполнением неравенства $\varepsilon^m/m! > 10^{-r}$ (r зависит от разрядной сетки конкретной ЭВМ).

§ 3. Вычисление решения

В (3), подставляя $\widetilde{H}(h_n)$ и $\widetilde{C}(h_n)$ вместо $H(h_n)$ и $C(h_n)$, получаем приближенное (базовое) решение

(3.1) $$\widetilde{x}_n = \widetilde{H}(h_n)\,\widetilde{x}_{n-1} + \widetilde{C}(h_n)\,b, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Очевидно, что оно может быть записано в виде

$$\widetilde{x}_n = \widetilde{H}(\tau_n)\,\widetilde{x}_0 + \widetilde{C}(\tau_n)\,b, \quad \tau_n = \sum_{k=1}^{n} h_k.$$

Уточненное решение x_n^p получается с помощью $H_p(\tau_n)$ и $C_p(\tau_n)$ (формулы (2.3а, б)):

$$H_p(\tau_n) = [E + M(L_n, m, p)]\,\widetilde{H}(\tau_n),$$

$$C_p(\tau_n) = [\widetilde{C}(\tau_n) + A^{-1}M(L_n, m, p)]\,\widetilde{H}(\tau_n), \quad L_n = \tau_n/h_0.$$

Тогда из (2) следует, что $x_n^p = H_p(\tau_n)\,x_0 + C_p(\tau_n)\,b$. После очевидных преобразований получим

(3.2) $$x_n^p = \widetilde{x}_n + A^{-1}M(L_n, m, p)\,[b + A\widetilde{x}_n].$$

Определив погрешность численного решения δx формулой:

$$\delta x_n = x_n - x_n^p \approx x_n^{p+1} - x_n^p,$$

получим

(3.3) $$\delta x_n \approx \frac{(L_n + 1)!}{(p+1)!(L_n - p - 1)!}\,A^{-1}Q_{m+1}^{p+1}\,(b + A\widetilde{x}_n).$$

Совокупность формул (1.3), (3.1)—(3.3) представляют собой основу алгоритма решения поставленной задачи. Запишем его в компактном виде.

Шаг 1. Вычисление базовых операторов $\widetilde{H}(h_n)$ и $\widetilde{C}(h_n)$:

$$H_j = H_{j-1}^2, \quad C_j = 2C_{j-1} - C_{j-1}AC_{j-1},$$

$$j = 1, 2, \ldots, j_n, \quad l_{jn} = 2^{j_n - 1},$$

$$h = l_{j_n}h_0, \quad H_{j_n} = \widetilde{H}(h_n), \quad C_{j_n} = \widetilde{C}(h_n).$$

Шаг 2. Вычисление базового решения по формуле (3.1) при $x(t_n) = \widetilde{x}_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Шаг 3. Уточнение решения по формуле (3.2) при $L_n = \tau_n/h_0$, $x_n^0 = \widetilde{x}_n$.

Шаг 4. Вычисление глобальной ошибки по (3.3).

Область устойчивости для приведенной схемы, очевидно, определяется неравенством

$$|H_0(\lambda h_0)| = \left|\sum_{k=0}^{m} (\lambda h_0)^k/k!\right| < 1,$$

которое при $|\lambda|\,h_0 < \varepsilon \ll 1$ можно заменить неравенством

$$\mu < -\rho\varepsilon^m/(m+1)!,$$

где $\mu = \mathrm{Re}\,\lambda$, $\rho = |\lambda|$. Отсюда следует, что поскольку $\varepsilon^m/(m+1)! \ll 1$, схема является утойчивой практически во всей левой части спектральной плоскости $\lambda = \mu + i\varkappa$ независимо от величины шага интегрирования h_n.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Павлов Б. В.* О численном интегрировании «жестких» систем обыкновенных дифференциальных уравнений//Матем. проблемы химии. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1973. Ч. 1. С. 19—27.
2. *Павлов Б. В., Повзнер А. Я.* Об одном методе численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1973. Т. 13. № 4. С. 1056—1059.
3. *Павлов Б. В., Родионова О. Е.* Метод локальной линеаризации при численном интегрировании систем обыкновенных дифференциальных уравнений//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 5. С. 688—699.
4. *Павлов Б. В., Родионова О. Е.* О численном решении жестких локально-неустойчивых систем обыкновенных дифференциальных уравнений//Числ. решение обыкновенных дифференц. ур-ний. М.: ИПМатем. АН СССР, 1988. С. 84—95.
5. *Родионова О. Е.* Численное интегрирование жестких локально-неустойчивых систем обыкновенных дифференциальных уравнений//Дис. . . . канд. физ.-матем. наук. М.: ВЦ АН СССР, 1991. 96 с.
6. *Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г.* Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979.
7. *Крестинин А. В., Павлов Б. В.* Однополюсное дробно-рациональное приближение экспоненты в комплексной плоскости//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1981. Т. 21. № 5. С. 1318—1322.

Поступила в редакцию 10.03.93
Переработанный вариант 18.05.93

УДК 517.958:532.5

© 1994 г. В. А. ЛЮЛЬКА

(*Москва*)

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ

Проведен расчет гидродинамического сопротивления периодической структуры путем численного решения уравнений Навье — Стокса для вязкой несжимаемой жидкости. Обнаружено, что сопротивление периодической решетки уменьшается по сравнению с плоской пластинкой тех же размеров. При некоторых условиях снижение сопротивления может быть значительным (приблизительно в два раза). Результаты расчета применяются для объяснения некоторых явлений, связанных с полетом птиц.

Обычно полагают, что для снижения гидро- и аэродинамического сопротивления обтекаемые поверхности должны быть гладкими. Однако в природе летающие и плавающие животные часто не имеют гладких обтекаемых поверхностей. В частности, перья птиц негладкие, а имеют периодическую структуру. Вопросами плавания животных, в частности дельфинов, занимались многие исследователи в нашей стране (см., например, [1]). Предполагалось, что по телу дельфина идет бегущая волна, во впадинах которой образуется застойная зона, снижающая сопротивление движению.

В настоящей работе сделана попытка промоделировать обтекание опахала пера птицы в стационарном ламинарном потоке вязкой жидкости. В популярных